Příklady užití vektorů v geometrii

Jaromír Šimša, PřF MU Brno

Brno, 11. října 2024

Úsporné zápisy

I. Vektor $\overrightarrow{AB}$ zapisujeme jako $B - A$ namísto $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Důvod: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

„Rychleji“: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (B - O) - (A - O) = B - A$.

II. Střed úsečky AB zapisujeme jako $\frac{1}{2}(A + B)$.

Důvod: Je to bod S určený vektorem $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

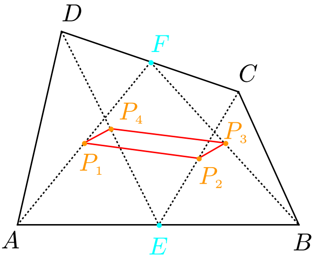
Obecně: Výraz $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n$ označuje

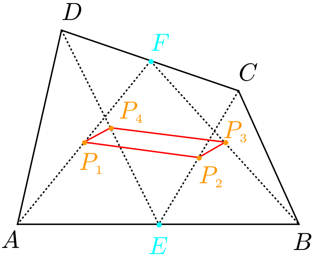
▷ **vektor**, je-li součet koeficientů λ_i **roven 0**;

▷ **bod**, je-li součet koeficientů λ_i **roven 1**.

Příklad 1

Ve čtyřúhelníku $ABCD$, jehož strany AB a CD nejsou rovnoběžné, označíme E střed strany AB a F střed strany CD. Dokažte, že středy úseček AF, CE, BF, DE jsou vrcholy rovnoběžníku.



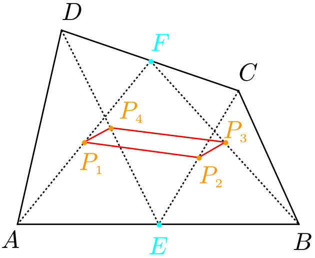


$$E = \frac{1}{2}(A+B), \quad F = \frac{1}{2}(C+D)$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(A+F) = \frac{1}{4}(2A+C+D), \qquad P_2 = \frac{1}{4}(2C+A+B),$$

$$P_3 = \frac{1}{4}(2B+C+D), \qquad P_4 = \frac{1}{4}(2D+A+B)$$

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{4}(-A+B+C-D) = P_3 - P_4$$

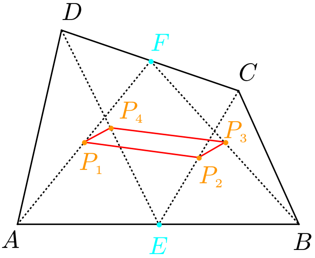


$$E = \frac{1}{2}(A+B), \quad F = \frac{1}{2}(C+D)$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(A+F) = \frac{1}{4}(2A+C+D), \qquad P_2 = \frac{1}{4}(2C+A+B),$$

$$P_3 = \frac{1}{4}(2B+C+D), \qquad P_4 = \frac{1}{4}(2D+A+B)$$

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{4}(-A+B+C-D) = P_3 - P_4 = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} \neq \vec{o}$$



$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3} = +\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CD},$$
$$\overrightarrow{P_4P_1} = \overrightarrow{P_3P_2} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} \quad \square$$

Skalární součin dvou vektorů

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \quad (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

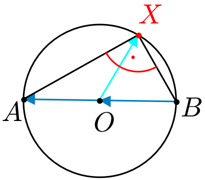
$$|AB|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}, \quad \cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}, \quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

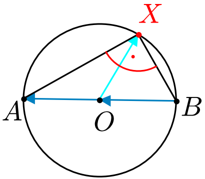
Provázanost s kosinovou větou: Pro obecný $\triangle ABC$ platí

$$c^2 = |AB|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right) =$$
$$= \underbrace{|CB|^2}_{=a^2} - 2\,\underbrace{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}}_{=ab\cos\gamma} + \underbrace{|CA|^2}_{=b^2} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Příklad 2

Dokažte Thaletovu větu: *Je-li bod O střed úsečky AB o délce $2r$, pak pro každý bod X různý od bodů A, B je úhel AXB pravý, právě když platí $|OX| = r$.*





$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO} \quad \text{a} \quad |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{BO}| = r$$

$$|OX| = r \quad \Leftrightarrow \quad |\overrightarrow{OX}|^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad |\overrightarrow{OX}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 \quad \Leftrightarrow$$

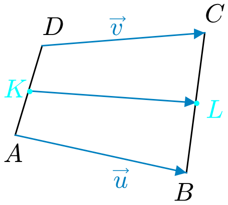
$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

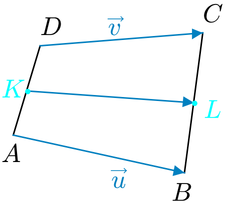
$$\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OA}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OX}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BX} = 0 \quad \square$$

Příklad 3

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany AB a CD jsou shodné. Dokažte, že přímky AB a CD svírají stejný úhel s přímkou, která prochází středy stran AD a BC.





$$\overrightarrow{KL} = L - K = \frac{B+C}{2} - \frac{A+D}{2} = \frac{(B-A)+(C-D)}{2} = \frac{\vec{u}+\vec{v}}{2},$$

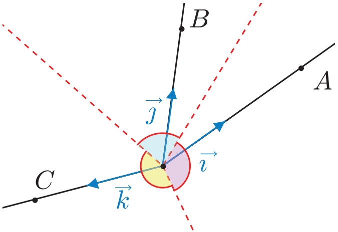
$$\cos\left(\vec{u}, \overrightarrow{KL}\right) = \frac{\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})}{|\vec{u}|\cdot|\vec{u}+\vec{v}|} = \frac{|\vec{u}|^2 + \vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{u}+\vec{v}|},$$

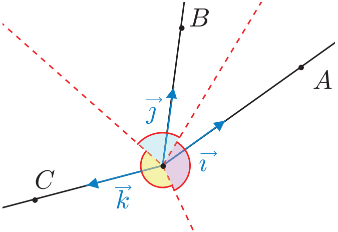
$$\cos\left(\vec{v}, \overrightarrow{KL}\right) = \frac{\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}+\vec{v}|} = \frac{|\vec{v}|^2 + \vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}+\vec{v}|.}$$

Díky předpokladu $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ se oba kosiny rovnají. $\square$

Příklad 4

V prostoru jsou dány tři různé polopřímky OA, OB, OC se stejným počátkem O, přičemž žádné dvě z nich nejsou navzájem opačné. Ukažte, že všechny tři úhly tvořené osami úhlů AOB, BOC a COA jsou buď ostré, nebo tupé, nebo pravé.





Úhel mezi dvěma nenulovými vektory je ostrý (pravý, tupý), je-li jejich skalární součin kladný (nulový, záporný).

$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ – jednotkové směrové vektory polopřímek OA, OB, OC

$\Rightarrow \vec{\imath}+\vec{\jmath}$, $\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\vec{\imath}+\vec{k}$ – směrové vektory os úhlů AOB, BOC, COA

$$(\vec{\imath}+\vec{\jmath})\cdot(\vec{\jmath}+\vec{k}) = |\vec{\jmath}|^2 + \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} + \vec{\imath}\cdot\vec{k} + \vec{\jmath}\cdot\vec{k},$$

$$(\vec{\jmath}+\vec{k})\cdot(\vec{\imath}+\vec{k}) = |\vec{k}|^2 + \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} + \vec{\imath}\cdot\vec{k} + \vec{\jmath}\cdot\vec{k},$$

$$(\vec{\imath}+\vec{k})\cdot(\vec{\imath}+\vec{\jmath}) = |\vec{\imath}|^2 + \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} + \vec{\imath}\cdot\vec{k} + \vec{\jmath}\cdot\vec{k}.$$

$|\vec{\imath}|^2 = |\vec{\jmath}|^2 = |\vec{k}|^2 = 1 \;\Rightarrow$ tři skalární součiny se rovnají $\square$

Vektorový součin dvou vektorů

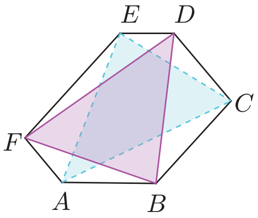
$$\boxed{\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi, \\ |\vec{w}| \neq 0 \;\Rightarrow\; \vec{w} \perp \vec{u} \text{ a } \vec{w} \perp \vec{v}, \\ |\vec{w}| \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{trojice } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ splňuje } \ldots \end{cases}}$$

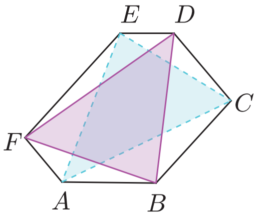
$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}, \quad (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v}), \quad (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}, \quad S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

Příklad 5

Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník, jehož každé dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné. Dokažte, že trojúhelníky ACE a BDF mají stejný obsah.





O – libovolný počátek,
$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$, $\vec{f} = \overrightarrow{OF}$.

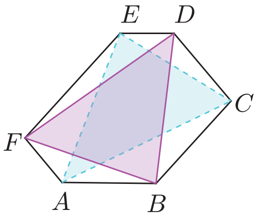
Z rovnoběžnosti protilehlých stran

$$\vec{o} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{ED} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{d} - \vec{e}) = \vec{b} \times \vec{d} - \underline{\vec{b} \times \vec{e}} - \underline{\vec{a} \times \vec{d}} + \vec{a} \times \vec{e},$$

$$\vec{o} = \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{FE} = (\vec{b} - \vec{c}) \times (\vec{e} - \vec{f}) = \underline{\vec{b} \times \vec{e}} - \vec{b} \times \vec{f} - \vec{c} \times \vec{e} + \underline{\vec{c} \times \vec{f}},$$

$$\vec{o} = \overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{AF} = (\vec{d} - \vec{c}) \times (\vec{f} - \vec{a}) = \vec{d} \times \vec{f} - \underline{\vec{d} \times \vec{a}} - \underline{\vec{c} \times \vec{f}} + \vec{c} \times \vec{a}.$$

Sečtením a úpravou: $\vec{c} \times \vec{e} - \vec{c} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{e} = \vec{d} \times \vec{f} - \vec{d} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{f}.$



O – libovolný počátek,
$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$, $\vec{f} = \overrightarrow{OF}$.

$$\boxed{\vec{c}\times\vec{e}-\vec{c}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{e} = \vec{d}\times\vec{f}-\vec{d}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{f}}$$

$$2S_{ACE} = \left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AE}\right| = |(\vec{c}-\vec{a})\times(\vec{e}-\vec{a})| = |\vec{c}\times\vec{e}-\vec{c}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{e}|,$$

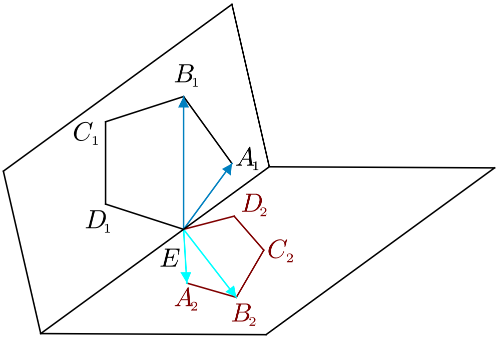
$$2S_{BDF} = \left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BF}\right| = |(\vec{d}-\vec{b})\times(\vec{f}-\vec{b})| = |\vec{d}\times\vec{f}-\vec{d}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{f}|.$$

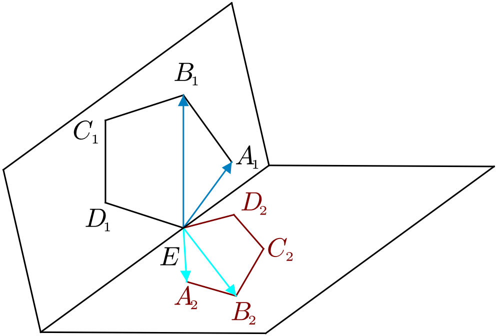
Proto skutečně $\quad S_{ACE} = S_{BDF}. \quad \square$

Děkuji za pozornost.

Příklad 7

V prostoru jsou dány dva pravidelné pětiúhelníky $A_1B_1C_1D_1E$ a $A_2B_2C_2D_2E$ se společným vrcholem E, které neleží v téže rovině. Dokažte, že přímky A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 a D_1D_2 jsou rovnoběžné s některou rovinou.





Pro vhodná $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ platí

$$\overrightarrow{EC_1} = p\overrightarrow{EA_1} + q\overrightarrow{EB_1} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{ED_1} = r\overrightarrow{EA_1} + s\overrightarrow{EB_1},$$

stejně jako

$$\overrightarrow{EC_2} = p\overrightarrow{EA_2} + q\overrightarrow{EB_2} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{ED_2} = r\overrightarrow{EA_2} + s\overrightarrow{EB_2}.$$

$$\overrightarrow{EC_1} = p\overrightarrow{EA_1} + q\overrightarrow{EB_1}, \qquad \overrightarrow{ED_1} = r\overrightarrow{EA_1} + s\overrightarrow{EB_1},$$
$$\overrightarrow{EC_2} = p\overrightarrow{EA_2} + q\overrightarrow{EB_2}, \qquad \overrightarrow{ED_2} = r\overrightarrow{EA_2} + s\overrightarrow{EB_2}.$$

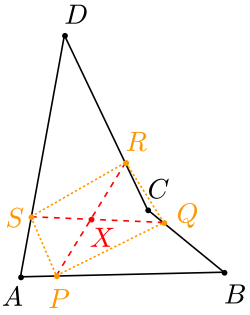
Proto vektory $\overrightarrow{C_1C_2}$ a $\overrightarrow{D_1D_2}$ mají vyjádření:

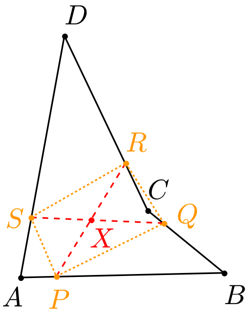
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{C_1C_2} &= \overrightarrow{EC_2} - \overrightarrow{EC_1} = (p\overrightarrow{EA_2} + q\overrightarrow{EB_2}) - (p\overrightarrow{EA_1} + q\overrightarrow{EB_1}) = \\
&= p(\overrightarrow{EA_2} - \overrightarrow{EA_1}) + q(\overrightarrow{EB_2} - \overrightarrow{EB_1}) = p\overrightarrow{A_1A_2} + q\overrightarrow{B_1B_2}, \\
\overrightarrow{D_1D_2} &= \overrightarrow{ED_2} - \overrightarrow{ED_1} = (r\overrightarrow{EA_2} + s\overrightarrow{EB_2}) - (r\overrightarrow{EA_1} + s\overrightarrow{EB_1}) = \\
&= r(\overrightarrow{EA_2} - \overrightarrow{EA_1}) + s(\overrightarrow{EB_2} - \overrightarrow{EB_1}) = r\overrightarrow{A_1A_2} + s\overrightarrow{B_1B_2}
\end{aligned}$$

Všechny čtyři přímky A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 a D_1D_2 jsou tak rovnoběžné s rovinou určenou vektory $\overrightarrow{A_1A_2}$ a $\overrightarrow{B_1B_2}$. $\square$

Příklad 8

Nechť A, B, C, D jsou čtyři *nekomplanární* body v prostoru. Najděte množinu středů všech rovnoběžníků, jejichž vrcholy leží postupně na úsečkách AB, BC, CD, DA.





$$P = tA + (1-t)B, \quad Q = uB + (1-u)C, \qquad (t, u \in \langle 0, 1\rangle)$$
$$R = vC + (1-v)D, \quad S = wD + (1-w)A \qquad (v, w \in \langle 0, 1\rangle)$$

$$PQRS \text{ je rovnoběžník} \quad \Leftrightarrow \quad X = \tfrac{1}{2}(P+R) = \tfrac{1}{2}(Q+S)$$

$$P = tA + (1-t)B, \quad Q = uB + (1-u)C, \qquad (t, u \in \langle 0, 1\rangle)$$
$$R = vC + (1-v)D, \quad S = wD + (1-w)A \qquad (v, w \in \langle 0, 1\rangle)$$

$PQRS$ je rovnoběžník $\quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{1}{2}(P + R) = \frac{1}{2}(Q + S)$

$$\frac{1}{2}(tA+(1-t)B+vC+(1-v)D) = \frac{1}{2}(uB+(1-u)C+wD+(1-w)A)$$

Odtud díky nekomplanárnosti bodů A, B, C, D plyne

$$t = 1 - w, \quad 1 - t = u, \quad v = 1 - u, \quad 1 - v = w.$$

Řešením je $u = w = 1 - t$ a $v = t$, takže hledané středy X jsou

$$X = \frac{1}{2}(tA+(1-t)B+tC+(1-t)D) = t \cdot \frac{A+C}{2} + (1-t) \cdot \frac{B+D}{2},$$

což je pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ rovnice jisté úsečky. $\quad \square$